



TITLE:

悪条件性を推定する浮動小数グレブナー基底の計算法 (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

AUTHOR(S):

佐々木, 建昭; 加古, 富志雄

CITATION:

佐々木, 建昭 ...[et al]. 悪条件性を推定する浮動小数グレブナー基底の計算法 (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications). 数理解析研究所講究録 2009, 1652: 33-43

ISSUE DATE:

2009-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140817>

RIGHT:

悪条件性を推定する浮動小数グレブナー基底の計算法

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

加古 富志雄 (Fujio Kako) †

奈良女子大学 理学部

DEPARTMENT OF COMP. SCI., NARA WOMEN'S UNIVERSITY

Abstract

浮動小数係数多項式のグレブナー基底計算は、最近まで深刻な問題であった。計算は時に非常に不安定になるが、安定化する方法は誰も分らなかった。昨年、筆者らは不安定性の原因を明らかにし、不安定性を除去する方法を呈示した。しかしながら、その方法は非常に計算が重く、実際的でない。本稿ではまず、不安定性が生じる多くの場合を調べ、理論的に解析する。この解析に基づき、浮動小数グレブナー基底の実際的な計算法を呈示する。この方法は多倍長有効浮動小数を利用するもので、前論文で呈示した方法の欠点をほぼ完全に克服する。さらに、入力多項式系の悪条件性を推定する実際的方法も呈示する。

1 はじめに

浮動小数係数多項式の代数的計算法は計算機代数の近年のホットテーマで、GCD 計算や因数分解などで多くの成果が得られている。しかしながら、浮動小数を用いたグレブナー基底（浮動小数グレブナー基底と呼ぶ）に関しては、近似代数において非常に重要であるにも拘らず、やっと計算法が得られだしたところである。まず、浮動小数グレブナー基底には 2 種類あることを注意しておく。第 1 種は、入力多項式の係数は正確だが何らかの理由で浮動小数を用いる場合である。第 2 種は、入力多項式の係数が不正確なので実用上、浮動小数で表す場合である。本稿では第 2 種を扱う。

第 1 種の基底は Shirayanagi & Sweedler [10, 11, 12] により研究された。第 2 種は、Stetter [13], Fortuna, Gianni & Trager [4], Traverso & Zanon [17, 16], Weispfenning [18], Kondratyev, Stetter & Winkler [7], Gonzalez-Vega, Traverso & Zanon [5], Stetter [15], Bodrato & Zanon [1], Mourrain と共同研究者 [8], 等により研究された。多くの研究にも拘らず、第 2 種はごく最近まで深刻な問題であった。昨年、著者らは [9] において不安定性の原因を明らかにし、一つの安定化法を呈示して突破口を開いた。

論文 [9] では不安定性の原因として二つ挙げられている。第一は**主要項のキャンセル**（主要項については 2 章を参照）であり、第二は**完全誤差項**（誤差のみから成る項）の出現である。浮動小数による代数的計算を観察すると、多項式の加減算で主要な項が互いにキャンセルし、大きな誤差が生じることが頻繁にある。主要項は正確にキャンセルすることも多いが、浮動小数計算では正確なキャンセルは大抵 0 とならず、完全誤差項となって残る。完全誤差項が主項に現れた場合、以後の計算は全く誤ったものとなる。

論文 [9] は主要項のキャンセルを二つの型、**自己簡約**と**本質的キャンセル**、に分類した。自己簡約は微小主項または巨大主項の多項式により引き起こされ、数値行列のガウス消去において微小ピボット行による

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

†kako@ics.nara-wu.ac.jp

消去が大きな桁落ちを引き起こすように、大きな桁落ち誤差を引き起こす。後に述べるように、自己簡約による精度低下は回避可能である。本質的キャンセルは、悪条件数値行列の消去で起きるキャンセルに類似であり、浮動小数グレブナー基底は本質的キャンセルの分だけ精度が低下する。[9] は本質的キャンセル量が近似グレブナー基底計算に深く関係することを指摘している。

自己簡約に基づく誤差を回避する方法として、論文 [9] で呈示されたのは次のものである：微小主係数を他の記号で置き換え、巨大主係数の場合は別の記号を残余項全体に掛け、記号係数としてグレブナー基底を計算する。これを“記号係数法”と呼ぶ。完全誤差項は、各係数を有効浮動小数で表すことにより自動的に除去する。有効浮動小数は予想以上によく働くが、記号係数法は次の二つの大きな欠点を有する：1) 計算が非常に重い、2) 自己簡約による誤差を完全には除去できない。後者の理由は、たとえば相対的に 0.3 の大きさの主係数でさえある程度の桁落ちを引き起こし得るが、このような“そんなに小さくない”係数まで記号で置き換えるのは実際的でないからである。

本稿では、上記二つの欠点を克服する実際的な方法を呈示する。新しい方法は記号を導入せず、各係数を多倍長有効浮動小数で置き換えるだけの簡単無類なものである。この方法により本稿で考える自己簡約の全ての場合において、自己簡約による精度低下が避けられることを証明する。さらに、本質的キャンセル量を推定する実際的な方法を呈示する。

2 自己簡約による不安定性

まず初めに、本稿では主項消去のみによってグレブナー基底を計算することを強調しておく。このことは以下の議論で決定的に重要である。

F, G 等が多変数多項式を表すとする。多項式 F のノルムは $\|F\|$ で表す；本稿では無限大ノルム（絶対値最大の係数）を用いる。係数なしの項をべき積と呼ぶ。 $\text{lt}(F)$, $\text{lc}(F)$, $\text{rt}(F)$ は項順序 \succ に関する F の主項、主係数、残余項をそれぞれ表す： $F = \text{lt}(F) + \text{rt}(F)$, $\text{lt}(F) \succ \text{rt}(F)$ 。 $\text{Spol}(F, G)$ は F と G の S 多項式を、 $\text{Lred}(F, G)$ は $\text{lt}(F)$ の G による M 簡約を表す。 $\text{Lred}(F, G)$ は $F \xrightarrow{G} \bar{F}$ とも表される。 $F \xrightarrow{G} \bar{F}$ は F を G により可能な限り、すなわち $\text{lt}(\bar{F})$ が G に関して M 既約になるまで簡約することを表す。

まず、本質的キャンセルを例で説明する。

例 1 本質的キャンセルが起きる例。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 57/56 x^2 y + 68/67 x z^2 - 79/78 x y + 89/88 x \\ P_2 = \quad \quad \quad x y z^3 - x y^2 z + x y z \\ P_3 = 56/57 x y^2 - 67/68 y z^2 + 78/79 y^2 - 88/89 y \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

与式 P_1, P_2, P_3 の数係数を倍長浮動小数に変換して係数に誤差を入れたのち、30 桁精度の多倍長浮動小数でグレブナー基底を計算すると、下記の結果が得られた（下線は正しい数字を表す）。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1, P_2, P_3 \text{ are unchanged,} \\ P_6 = y^2 z^2 - \underline{2.995436947732552644538319700370} x y^2 \\ \quad \quad \quad - \underline{1.0020782165123748257674951096740} y^3 \\ \quad \quad \quad + \underline{1.9983254691737245140192885621560} x y + \dots, \\ P_7 = x z^2 - \underline{1.764316342370426661429391997320e-3} y z^2 \\ \quad \quad \quad - \underline{9.947232450186805419457332443380e-1} x y \\ \quad \quad \quad + \underline{1.7679829737261936385647927531480e-3} y^2 + \dots \end{array} \right.$$

初期誤差のいくつかは相対的に約 10^4 倍に拡大されている。この誤差は倍長浮動小数で計算しても同じである。後で分ることだが、自己簡約による誤差は数値精度を上げるとその分だけ減少する。◇

以下では、 $\|F-G\| \ll \|G\|$ のとき $F \approx G$ と表し、 $\eta < \|F\|/\|G\| < 1/\eta$ のとき $\|F\| = O(\|G\|)$ と表す。ここで、 η は 1 より小さいがそんなに小さくはない正数である。(著者等の計算機プログラムでは $\eta = 0.2$ とし、 $\|G\| < 0.2 \times \|F\|$ のとき $\|G\| \ll \|F\|$ としている)。 $|\text{lc}(F)| = O(\|\text{rt}(F)\|)$ のとき F は正常といい、 F の項 T が $\|T\| = O(\|F\|)$ を満たすとき T を F の主要項と呼ぶ。

定義 1 (クローンと類似度) R は $\text{Spol}(F, G)$, $\text{Lred}(F, G)$ あるいは $F \xrightarrow{G} R$ であるとする。単項式 M により $R \approx M \text{rt}(G)$ と表されるとき、 R は G のクローンといい、 $\text{clone}(G)$ と表す。 F と G のノルムを 1 とするとき、 $\|\tilde{F}\|/\|\text{rt}(G)\|$ をクローンの R の類似度と呼ぶ。◇

次に自己簡約を説明する。 F_1 と F_2 は正常な多項式とし、 G は微小主項の多項式とする： $|\text{lc}(G)| \ll \|G\|$ 。 G による F_1 と F_2 の M 簡約を次式とする。

$$F_1 \xrightarrow{G} \tilde{F}_1, \quad F_2 \xrightarrow{G} \tilde{F}_2 \quad (F_1 \neq \tilde{F}_1, F_2 \neq \tilde{F}_2). \quad (2.2)$$

$|\text{lc}(F_i)|/\|F_i\| \gg |\text{lc}(G)|/\|G\|$ ($i = 1, 2$) である限り、通常、次式が成立する；次式で、 M_1 と M_2 は最後の M 簡約の際、 G に掛けられる単項式である。

$$\tilde{F}_1 \approx M_1 \text{rt}(G) \quad \text{and} \quad \tilde{F}_2 \approx M_2 \text{rt}(G). \quad (2.3)$$

したがって、 \tilde{F}_1 と \tilde{F}_2 は G のクローンである。ここで、 $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ を考える ($\text{lt}(\tilde{F}_2) | \text{lt}(\tilde{F}_1)$ ならば $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = \text{Lred}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ であり、 $\text{lt}(\tilde{F}_1) | \text{lt}(\tilde{F}_2)$ ならば $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = -\text{Lred}(\tilde{F}_2, \tilde{F}_1)$ なので、 $\text{Lred}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ と $\text{Lred}(\tilde{F}_2, \tilde{F}_1)$ は考えない)。 \tilde{M}_1, \tilde{M}_2 は単項式とし、 $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) = \tilde{M}_1 \tilde{F}_1 - \tilde{M}_2 \tilde{F}_2$ とおく。 $\text{lt}(\tilde{F}_i) \succ M_i \text{rt}(G)$ ($i \in \{1, 2\}$) のこともあるので、次式を仮定する。

$$\text{lt}(\tilde{F}_1) \approx \text{lt}(M_1 \text{rt}(G)) \quad \text{and} \quad \text{lt}(\tilde{F}_2) \approx \text{lt}(M_2 \text{rt}(G)). \quad (2.4)$$

条件 (2.3), (2.4) より、 $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \approx \tilde{M}_1 M_1 \text{rt}(G) - \tilde{M}_2 M_2 \text{rt}(G)$ となるので、 $\|\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)\| \approx \|\tilde{M}_1 M_1 \text{rt}(G) - \tilde{M}_2 M_2 \text{rt}(G)\| \ll \|\tilde{M}_1 M_1 \text{rt}(G)\|$ を得る。この式は $\tilde{M}_1 M_1 \text{rt}(G)$ と $\tilde{M}_2 M_2 \text{rt}(G)$ の主要項が互いにキャンセルすることを意味する。このキャンセルは次式が成立するとき正確である。

$$\text{lt}(\tilde{F}_1) = \text{lt}(M_1 \text{rt}(G)) \quad \text{and} \quad \text{lt}(\tilde{F}_2) = \text{lt}(M_2 \text{rt}(G)). \quad (2.5)$$

明らかに、 $\tilde{F}_1 = \text{Spol}(F_1, G)$ and/or $\tilde{F}_2 = \text{Spol}(F_2, G)$ のときにも上記の議論は成立する。クローンの全ての主要項がキャンセルすることを [9] では自己簡約と呼んだ。

二項式の場合は注意を要する。 F_1 と F_2 は正常多項式とし、簡約子 G は微小主項の二項式とする： $G = g_1 T_1 + g_2 T_2$ 、ここで T_1 と T_2 はべき積で、係数は $|g_1| \ll |g_2|$ であるとする。このとき、 $\text{Lred}(F_1, G)$ は一つの大項を持つ多項式となり、 $\text{Lred}(F_2, G)$ も同様である。もし T_2 が \tilde{F}_1 と \tilde{F}_2 の両方の主項に含まれるなら、 \tilde{F}_1 と \tilde{F}_2 の巨大主項どうしがキャンセルするので、 $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ は自己簡約を起こさない。自己簡約が起きるのは $|\text{lc}(\tilde{F}_1)|/\|\tilde{F}_1\| \approx |\text{lc}(\tilde{F}_2)|/\|\tilde{F}_2\|$ であり、かつ各 \tilde{F}_i が項 \tilde{T}_i ($i = 1, 2$) を持って $\text{lt}(\tilde{F}_2) \tilde{T}_1 \approx \text{lt}(\tilde{F}_1) \tilde{T}_2$ が成立するときである。これは稀にしか起きない。しかし、 G は大項を持つ多項式を生成することに注意する必要がある。もしも大項が主項ならば、以下に述べるように自己簡約を引き起こす。大項が主項でなくとも、M 簡約を続けていけば大項が主項の位置にくることもある。

巨大主項も自己簡約を引き起こすが状況はかなり異なる。 F_1 と F_2 は巨大主項の多項式とし、 G は正常多項式とする。

$$|\text{lc}(F_i)| \ll \|\text{rt}(F_i)\| \quad (i = 1, 2), \quad |\text{lc}(G)| = O(\|\text{rt}(G)\|). \quad (2.6)$$

このとき、 T_1 と T_2 をべき積として、 $\text{Lred}(F_i, G)$ は次のように表せる ($i = 1, 2$)。

$$\text{Lred}(F_i, G) = F_i - \text{lc}(F_i)/\text{lc}(G) \cdot T_i G \approx -\text{lc}(F_i)/\text{lc}(G) \cdot T_i \text{rt}(G). \quad (2.7)$$

よって $\text{Lred}(F_i, G)$ は G のクローンであり、 $\text{Spol}(\text{Lred}(F_1, G), \text{Lred}(F_2, G))$ において自己簡約が起きる。自己簡約が起きるためには二つの巨大主項多項式が必要なので、微小主項多項式による自己簡約に比べて、巨大主項多項式による自己簡約は頻繁には起きない。 F が巨大主項多項式の場合、 F を微小主項多項式 G で M 簡約すると類似度 $(\|lc(F)\|/\|rt(F)\|) \cdot (\|G\|/\|lc(G)\|)$ の非常に大きなクローンが生成されるので、その方が実際には重要である。

多項式 F が微小主項多項式 G_1, \dots, G_m で順に M 簡約されることもある： $F \xrightarrow{G_1} \dots \xrightarrow{G_m} \bar{F}$ 。この場合、 \bar{F} を多重クローンと呼び、 $\text{clone}(G_1, \dots, G_m)$ と表す。多重クローンは下の例 2 で現れる。

実際にはほとんど起きないが複雑な自己簡約もある。 F_1 と F_2 は正常多項式とし、 F_1 と F_2 が微小主項多項式 G_1 と G_2 でそれぞれ 1 回だけ M 簡約されるとする： $F_i \xrightarrow{G_i} \bar{F}_i = F_i - M_i G_i$ ($i = 1, 2$)。このとき $\bar{F}_1 \approx M_1 \text{rt}(G_1)$ かつ $\bar{F}_2 \approx M_2 \text{rt}(G_2)$ である。 $\text{Spol}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{M}_1 \bar{F}_1 - \bar{M}_2 \bar{F}_2$ を考える。ただし \bar{M}_1 と \bar{M}_2 は単項式である。ここで、いくつかの仮定をする。まず、

$$\text{lt}(\bar{F}_i) \succ M_i \text{rt}(G_i) \quad (i = 1, 2), \quad \text{rt}(\bar{M}_1 \bar{F}_1) \succ \text{rt}(\bar{M}_2 \bar{F}_2) \quad (2.8)$$

なる関係が成立すると仮定する。つぎに単項式 N_1 と N_2 に対して $\bar{G}_1 \approx N_1 \text{rt}(G_1)$ かつ $\bar{G}_2 \approx N_2 \text{rt}(G_2)$ となる多項式 \bar{G}_1 と \bar{G}_2 が計算中のイデアル基底内に存在し、 $\text{lt}(\bar{G}_i) \mid \text{lt}(\bar{M}_i \text{rt}(G_i))$ ($i = 1, 2$) を満たすとする。仮定より、 $\text{Spol}(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ は項 $\bar{M}_1 M_1 \text{rt}(G_1)$ と $\bar{M}_2 M_2 \text{rt}(G_2)$ を含むから、 $\text{Spol}(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ を \bar{G}_1 と \bar{G}_2 で続けて M 簡約すれば、自己簡約が起きる可能性がある。この自己簡約を対自己簡約と呼ぶことにする。対自己簡約にはきつい制約がかかる： \bar{G}_1 による M 簡約は $\bar{M}_2 \bar{F}_2$ の主項を変えてはならず、 $\text{lt}(\bar{M}_2 \bar{F}_2)$ は $\text{Lred}(\text{Spol}(\bar{F}_1, \bar{F}_2), \bar{G}_1)$ の主項でなければならない。

例 2 巨大な誤差を引き起こす簡単な系 ([9] で与えた例)。

$$\begin{cases} P_1 = x^3/10.0 + 3.0x^2y + 1.0y^2 \\ P_2 = 1.0x^2y^2 - 3.0xy^2 - 1.0xy \\ P_3 = y^3/10.0 + 2.0x^2 \end{cases}$$

全次数順序のグレブナー基底を倍精度浮動小数で計算する過程の 3 分の 2 ほどを示す。算法は \mathbf{Q} 上の算法と同じで、特別の工夫はしていない。クローンあるいはクローンを生成する簡約子を□で示す。

$$\begin{aligned} & \text{Spol}(P_3, P_2) \xrightarrow{P_1} \xrightarrow{P_1} \xrightarrow{P_2} \xrightarrow{P_3} \boxed{P_1} \boxed{P_4} \quad /* P_4 = \text{clone}(P_1) \\ & P_4 = x^2y + 29.8 \dots xy^2 + 3.33 \dots y^3 + 10.0xy + 0.333 \dots y^2 \\ & P_2 \xrightarrow{P_4} \xrightarrow{P_3} \boxed{P_1} \boxed{P_4} \boxed{P_2'} \quad /* P_2' = \text{clone}(P_1, P_4) \\ & P_2' = xy^2 + 0.111 \dots y^3 + 0.334 \dots xy - 0.000041 \dots y^2 \\ & \text{Spol}(P_3, P_2') \xrightarrow{P_3} \boxed{P_1} \boxed{P_4} \boxed{P_2'} \xrightarrow{P_3} P_5 \quad /* \text{self-reduction} \\ & P_5 = x^2 + 7.14 \dots xy + 0.573 \dots y^2 \\ & P_4 \xrightarrow{P_5} \xrightarrow{P_2'} \xrightarrow{P_3} \boxed{P_5} \boxed{P_4'} \quad /* P_4' = \text{clone}(P_5) \\ & P_4' = xy + 0.0844 \dots y^2 \\ & P_2' \xrightarrow{P_4'} \xrightarrow{P_3} \boxed{P_5} \boxed{P_4'} \xrightarrow{P_2'} P_2'' \quad /* \text{self-reduction} \end{aligned}$$

この例では非常に大きなキャンセルが起きている：5 行と 9 行では自己簡約が起きて、それぞれ $O(10^8)$ と $O(10^2)$ の誤差が生じている。他の計算ステップではほとんど誤差は生じていない。なお、第 3 行の P_2' は 2 重クローンであり、同様に第 5 行では P_1 と P_4 による M 簡約で 2 重クローンが生じ、その 2 重クローンが別の 2 重クローンである P_2' で M 簡約されている。◇

例2で巨大な誤差が生じた理由を説明する。上述したごとく、第5行における自己簡約は2重クローンどうしの自己簡約であり、単クローンどうしの自己簡約よりも大きなキャンセルを起こす。次章に述べる定理1によれば、今の場合、自己簡約によるキャンセル量は $O((\|P_1\|/\text{lc}(P_1))(\|P_4\|/\text{lc}(P_4)))$ であるが、実際にはこれよりはるかに大きなキャンセルが起きている。この表面的な食い違いの理由は、 P_1 によるM簡約の前に、当該の多項式がいずれも P_3 でM簡約されていることにある。 P_3 は微小主項の二項式なので、 P_3 によるM簡約で当該多項式は巨大主項の多項式になる。それが微小主項の多項式でM簡約されるため、 $\text{Lred}(\text{Lred}(\text{Lred}(*, P_3), P_1), P_4)$ は類似度が非常に大きい多項式となるのである。したがって、この場合のキャンセル量は $O((\|P_1\|/\text{lc}(P_1))^2(\|P_3\|/\text{lc}(P_3))^2)$ となる。[9]で述べたように、記号係数法ではこれと同じ量のキャンセルが生じることが記号的に明示される。

3 2章で述べた自己簡約の解析

論文[9]において著者等は単クローンによる典型的な自己簡約を解析した。本章では、2章に述べた自己簡約を解析する。特に、多重クローンを重点的に解析する。

Collins [2] に従い、付属多項式を導入する。 T_1, \dots, T_m を相異なるべき積とし、多項式 P_i ($i = 1, \dots, n$) を $P_i = c_{i1}T_1 + \dots + c_{im}T_m$ と表す。ただし、 $n < m$ である。さらに、 $M = (c_{ij})$ を $n \times m$ 行列とする。 M に付属する多項式は次式で定義され、 $\text{assP}(M)$ と表される。

$$\text{assP} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{m-n} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n,n+i} \end{vmatrix} T_{n+i}. \quad (3.1)$$

多項式 F と F' を $F = f_1S_1 + f_2S_2 + \dots + f_mS_m$ 、 $F' = f'_1S'_1 + f'_2S'_2 + \dots + f'_mS'_m$ と表す。ただし、 S_i と S'_i はべき積で、 $S_1 \succ S_2 \succ \dots \succ S_n$ かつ $S'_1 \succ S'_2 \succ \dots \succ S'_n$ と順序づけられており、適当なべき積 S に対して $S_i = SS'_i$ ($1 \leq i \leq m$) を満たし、さらに $f_1f'_1 \neq 0$ とする ($i > 1$ では f_i と f'_i は0でもよい)。同様に、多項式 G と G' を $G = g_1T_1 + g_2T_2 + \dots + g_nT_n$ 、 $G' = g'_1T'_1 + g'_2T'_2 + \dots + g'_nT'_n$ と表す。ただし、 T_i と T'_i はべき積で、適当なべき積 T と T' に対して $S_i = TT_i$ および $S'_i = T'T'_i$ ($1 \leq i \leq m$) を満たし、さらに $g_1g'_1 \neq 0$ である ($i > 1$ では g_i と g'_i は0でもよい)。さて、 F と F' の両方が、 G で k 回M簡約され、引き続いて G' で k' 回M簡約される場合を考える： $F \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \xrightarrow{G'} \dots \xrightarrow{G'} \tilde{F}$ かつ $F' \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \xrightarrow{G'} \dots \xrightarrow{G'} \tilde{F}'$ 。したがって、 \tilde{F} と \tilde{F}' はどちらも G と G' の2重クローンである。次の補題はよく知られている（証明は k と k' に関する帰納法で簡単に示せる。あるいは [2] を参照）。

補題1 (well known) F, G, G' は上に定めた多項式とする。 F が G により k 回M簡約され、ついで G' により k' 回M簡約されたとする（主項のみが簡約されることに注意）。このとき、簡約後の多項式 \tilde{F} は次式で表される（定数倍は除外する）。

$$\tilde{F} = \text{assP} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & f_{n+1} & \cdots & \cdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & & & \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & & \\ & & g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_n & \\ & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

上式で、 $(\cdots g_1 \cdots g_n \cdots)$ -行と $(\cdots g'_1 \cdots g'_n \cdots)$ -行の個数はそれぞれ k と k' である。多項式 F, G, G' は、上記行列の各列の要素が同じ単項に対応するように適宜、係数0の項を付加されているものとする。◇

定理 1 $F, F', \tilde{F}, \tilde{F}'$ は上述の多項式とし、べき積 S に対し $\text{lt}(\tilde{F})/\text{lc}(\tilde{F}) = S \text{lt}(\tilde{F}')/\text{lc}(\tilde{F}')$ が成立するとする。さらに、 \tilde{F} と \tilde{F}' が (3.2) のように表されたとする (\tilde{F}' においては第 1 行を $(f'_1 f'_2 \cdots f'_n \cdots)$ で置き換える)。このとき、 $\text{lc}(\tilde{F}')\tilde{F} - \text{lc}(\tilde{F})S\tilde{F}'$ は次式のように分解できる。

$$\begin{vmatrix} g_1 & \cdots & g_k & \cdots & g_{k+k'} \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & g'_1 & \cdots & g'_{k'} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & g'_1 \end{vmatrix} \times \text{assP} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n & f_{n+1} & \cdots & \cdots \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n & f'_{n+1} & \cdots & \cdots \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n & & & \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & & \\ & & g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_n & \\ & & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

ここで、 $(\cdots g_1 \cdots g_n \cdots)$ -行と $(\cdots g'_1 \cdots g'_n \cdots)$ -行の個数はそれぞれ k と k' である。

(略証) 補題 1 と Sylvester の恒等式から簡単に導かれる。 \diamond

注釈 F は G で k_1 回簡約されたあと G' で k'_1 回簡約され、 F' は G で k_2 回簡約されたあと G' で k'_2 回簡約された場合を考える。たとえば $k_1 > k_2$ なら、 $k = k_2$ とおき、 F の $k_1 - k_2$ 回簡約を新しい F とすればよい。もしも $k'_1 \neq k'_2$ なら、 \tilde{F} と \tilde{F}' は 2 重クローンではなく、 G' の単クローンである。 \diamond

上記定理は、主項の大小に拘らず任意の G と G' に対して成立する。定理は、 $g_1^k g'_1^{k'}$ に比例しない項は全てキャンセルすることを意味する。通常、この項キャンセルは大きな誤差を生じない。しかし、もしも $|\text{lc}(G)| \ll \|G\|$ あるいは $|\text{lc}(G')| \ll \|G'\|$ ならば、主要項がキャンセルし、大きな誤差を引き起こす。

G と G' が微小主項のとき、 $\text{lc}(\tilde{F}')\tilde{F} - \text{lc}(\tilde{F})S\tilde{F}'$ において生じるキャンセル量を評価しよう。 $\text{lc}(\tilde{F})$, $\text{lc}(\tilde{F}')$ および \tilde{F} の $S_{k+k'+i}$ 項を表す行列式をそれぞれ $\tilde{D}_1, \tilde{D}'_1, \tilde{D}_i$ および \tilde{D}'_i とする。さらに、(3.3) の付属多項式で $S_{k+k'+i}$ 項を表す行列式を \tilde{D}_{1i} とする。 \tilde{D}_1 等の大きさは場合により複雑に変わるので、本稿では F と F' の係数が次式を満たす簡単な場合だけを考察する。

$$f_1 = f'_1 = 1, \quad f_i = 0 \text{ or } O(1), \quad f'_i = 0 \text{ or } O(1) \quad (i \geq 2). \quad (3.4)$$

系 1 F_1 と F_2 の係数は (3.4) を満たし、簡約子 G と G' の係数は次式を満たすとする。

$$\begin{aligned} |g_1| &\ll 1, \quad g_2 = \cdots = g_{l-1} = 0, \quad |g_l| = O(1), \quad |g_{l+i}| = O(1) \text{ or } 0, \\ |g'_1| &\ll 1, \quad g'_2 = \cdots = g'_{l'-1} = 0, \quad |g'_{l'}| = O(1), \quad |g'_{l'+i}| = O(1) \text{ or } 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Claim 1: $l = l' = 2$ のとき (すなわち $g_2 = O(1)$ かつ $g'_2 = O(1)$ のとき)、 $\text{lc}(\tilde{F}')\tilde{F} - \text{lc}(\tilde{F})S\tilde{F}'$ の計算において $O((1/g_1)^k (1/g'_1)^{k'})$ の大きさの主要項キャンセルが起きる。

Claim 2: $l \geq 3$ あるいは $l' \geq 3$ のとき ($g_2 = 0$ あるいは $g'_2 = 0$ のとき)、 $|\tilde{D}_1| = O((g_1)^{\kappa_1} (g'_1)^{\kappa'_1})$ 、 $|\tilde{D}_i| = O((g_1)^{\kappa_i} (g'_1)^{\kappa'_i})$ および $|\tilde{D}_{1i}| = O((g_1)^{\tilde{\kappa}} (g'_1)^{\tilde{\kappa}'})$ であるなら、 $\text{lc}(\tilde{F}')\tilde{F} - \text{lc}(\tilde{F})S\tilde{F}'$ の計算において $O((1/g_1)^{k-\kappa_1-\kappa_i+\tilde{\kappa}} (1/g'_1)^{k'-\kappa'_1-\kappa'_i+\tilde{\kappa}'})$ の大きさの主要項キャンセルが起きる。

証明 $l = l' = 2$ の場合：たとえば \tilde{D}_1 を考える。 \tilde{D}_1 の主要項は対角要素の積で与えられる：それ以外の項は g_1 あるいは g'_1 を少なくとも一つは含むからである。同様に、 $f'_{k+k'+i} \neq 0$ を満たす \tilde{D}_{1i} は $\tilde{D}_{1i} = O(1)$ であるから、Claim 1 が成立する。 $\tilde{D}'_1 \tilde{D}$ と $\tilde{D}_1 \tilde{D}'_i$ の主要項はほぼ同じ大きさであるから、行列式の大きさに関する仮定より Claim 2 も成立する。 \diamond

定理 1 を使えば、巨大主項多項式による自己簡約や対自己簡約も解析できる。巨大主項の場合は、定理 1 において $F_1 = F$, $F_2 = F'$, $G' = G$ とおき、 F と F' の主項が大きいとすればよく、次の系を得る (系は F_1 と F_2 の一方あるいは双方が幾つかの巨大主項をもつ場合に拡張できる)。

系2 F_1 と F_2 は巨大主項の多項式で、 G は正常多項式とし、 $\tilde{F}_i = \text{Lred}(F_i, G)$ ($i = 1, 2$) とすれば、 $\text{Spol}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ の計算で、大きさ $\min(\|\text{lc}(F_1)\|/\|\text{rt}(F_1)\|, \|\text{lc}(F_2)\|/\|\text{rt}(F_2)\|)$ の主要項キャンセルが起きる。◇

つぎに 対自己簡約を考える。 $F_1 = F, F_2 = F', G_1 = G, G_2 = G'$ とおき、簡単のため、 $\tilde{F} = \text{Lred}(F, G)$ および $\tilde{F}' = \text{Lred}(F', G')$ の場合を考察する (多重 M 簡約も同様に扱うことができる)。(2.8) の関係より、 \tilde{F} と \tilde{F}' は次式のように表すことができる。

$$\tilde{F} = \text{assP} \begin{pmatrix} f_1 & \hat{f}_1 & f_2 & \cdots \\ g_1 & 0 & g_2 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}' = \text{assP} \begin{pmatrix} f'_1 & \hat{f}'_1 & f'_2 & \cdots \\ g'_1 & 0 & g'_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

さらに、 $\text{Spol}(\tilde{F}, \tilde{F}') = \tilde{M}\tilde{F} - \tilde{M}'\tilde{F}' = \text{rt}(\tilde{M}\tilde{F}) - \text{rt}(\tilde{M}'\tilde{F}')$ は次のように表すことができる。

$$\tilde{M} \cdot \text{assP} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \end{pmatrix} - \tilde{M}' \cdot \text{assP} \begin{pmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & \cdots \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

$\tilde{G} \approx N \text{rt}(G)$ と $\tilde{G}' \approx N' \text{rt}(G')$ となる多項式 \tilde{G} と \tilde{G}' の存在を仮定したことは、 \tilde{G} と \tilde{G}' がそれぞれ $\tilde{G} = \text{Lred}(H, G)$, $\tilde{G}' = \text{Lred}(H', G')$ と計算されたことを意味する。よって、 \tilde{G} と \tilde{G}' は次式で表される。

$$\tilde{G} = \text{assP} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}' = \text{assP} \begin{pmatrix} h'_1 & h'_2 & h'_3 & \cdots \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

さらに、対自己簡約の発生は、 $\text{rt}(\tilde{M}\tilde{F})$ と $\text{rt}(\tilde{M}'\tilde{F}')$ がそれぞれ \tilde{G} と \tilde{G}' で M 簡約可能であることを意味する。よって、 $k = k' = 1$ とおき、 $\text{Lred}(\text{rt}(\tilde{M}\tilde{F}), \tilde{G})$ と $\text{Lred}(\text{rt}(\tilde{M}'\tilde{F}'), \tilde{G}')$ の各々に定理 1 を適用すると、次の系を得る。

系3 F, F', H, H' は正常多項式で、 G と G' は微小主項の多項式とし、 $\tilde{G} = \text{Lred}(H, G)$ および $\tilde{G}' = \text{Lred}(H', G')$ とおく。 $\text{Spol}(\tilde{F}, \tilde{F}')$ を \tilde{G} と \tilde{G}' で 1 回ずつ M 簡約したとき対自己簡約が起きるならば、大きさ $\min(\|F\|/\|\text{lc}(G)\|, \|H\|/\|\text{lc}(G)\|, \|F'\|/\|\text{lc}(G')\|, \|H'\|/\|\text{lc}(G')\|)$ の主要項キャンセルが起きる。◇

4 新しい計算法

浮動小数グレブナー基底に対する新しい計算法を呈示する。新しい方法は多倍長有効浮動小数を用いる。多倍長有効浮動小数は多倍長浮動小数 f により $\#BE[f, e]$ と表され、 f と e をそれぞれ値部、誤差部という。多倍長浮動小数 f の精度 (precision) が十進 p 桁ならば、誤差部は $|\text{値部}| \times 10^{-p+2}$ に初期設定する。誤差部は係数の実際の誤差を表わしてはいないことに注意。有効浮動小数の演算規則については [6] または [9] を参照されたい。以後、 $\epsilon_M = 10^{-p}$ とおく。

多項式系の各係数に現れる相対誤差は個々の係数ごとに異なるのが普通である。最大の相対誤差が ϵ であるとき、系の正確さ (accuracy) は ϵ であるという。当然、 $1 \gg \epsilon \gg \epsilon_M$ である。

入力多項式の数係数を多倍長浮動小数に変換してグレブナー基底を計算することを考える。自己簡約が起きれば、その分、数係数に桁落ち誤差が積もる。驚くべきことに、 ϵ_M を十分小さく選べば、3 章で考察した自己簡約のいずれもが入力式の正確さ ϵ を損なわないことを以下に示す。

定理2 3 章で扱った自己簡約ではいずれも、自己簡約による桁落ち誤差は係数の最下位桁から積もっていく。したがって、主要項のキャンセル量が $O(10^\kappa)$ ならば、最下位の κ 桁が損なわれる。

証明 まず、今の場合、各係数は ϵ_M よりはるかに大きな相対誤差を持っているが、多倍長浮動小数演算ではそれらの誤差も多倍長精度の範囲で正しく表現され、入力段階で確定した数のごとく扱われることを

指摘する。定理 1 と系 1 ～ 3 によれば、自己簡約による主要項キャンセルは全て正確なキャンセルである。したがって、これらの自己簡約は係数の最下位桁のみを損なう。◇

例 3 定理 2 を例 2 でチェックする。

例 2 の係数を倍長浮動小数に変換して $O(10^{-16})$ の相対誤差を入れた後、30 桁精度の多倍長有効浮動小数でグレブナー基底を計算した。参考のため、初期多項式を示す；17 桁目に丸め誤差が現れている。

$$\begin{cases} P_1 = + \#BE[3.33333333333333310e-2, 2.0e-28] x^3 + x^2 y \\ \quad + \#BE[3.33333333333333310e-1, 3.2e-27] y^2, \\ P_2 = + \#BE[3.33333333333333310e-1, 3.2e-27] x^2 y^2 - xy^2, \\ \quad - \#BE[3.33333333333333310e-1, 3.2e-27] xy \\ P_3 = + \#BE[5.0000000000000000e-2, 3.9e-28] y^3 + x^2. \end{cases}$$

たとえば $\text{Spol}(P_3, P_1)$ は M 簡約されて次式となる： xy^3 項の係数の 17～30 桁はすべて誤差である。

$$x^4 + \#BE[1.5000000000000001665334536937720e-1, 3.9e-28] xy^3 \\ + \#BE[5.0000000000000000e-2, 2.0e-28] xy^2.$$

計算された（未簡約の）グレブナー基底を示す：下線は正しい桁を表している。

$$\begin{cases} P_2'' = y^2, \\ P_4' = xy + \#BE[8.440225504521958676289311654600e-2, 3.3e-21] y^2, \\ P_5 = x^2 + \#BE[7.148496897462707006365493318940, 4.2e-19] xy \\ \quad + \#BE[5.737161395246457225742044589410e-1, 2.6e-20] y^2. \end{cases}$$

主要項の巨大なキャンセルが起きたにも拘らず、各係数の正確さはほんの少ししか損なわれていないことが分る。次章に見るように、正確さの若干の損ないは本質的キャンセルによるものと見做せる。◇

新しい計算法は下記三つの工夫から成っており、定理 2 に決定的に依存している。工夫 1 と 2 により自己簡約による桁落ち誤差は完全に除去される。工夫 3 は本質的キャンセル量を推定するものであるが、詳細は 5 章で説明する。

工夫 1： 入力多項式の各数係数を適当に定めた精度の多倍長有効浮動小数に変換し、通常どおりグレブナー基底を計算する。

工夫 2： 多倍長有効浮動小数の誤差部をモニターし、誤差部が入力式の初期の正確さを損なうほど大きくなったら、多倍長有効浮動小数の精度を上げて（桁数を増やして）再計算する。

工夫 3： 類似度がたとえば 5 以上のクローンによる自己簡約の発生をモニターする。以下では単クローンで工夫 3 を説明する；多重クローンの場合は 5 章を参照されたい。

$\text{Spol}(\text{Lred}(F_1, G), \text{Lred}(F_2, G))$ において、 $\tilde{F}_1 = \text{clone}(G)$ かつ $\tilde{F}_2 = \text{clone}(G)$ であり、減算 $\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2$ において自己簡約が発生したとする。 $\tilde{F}_i = c_i T \text{rt}(G) + (\text{微小項})$ ($i = 1, 2$) とする。ここで、 c_1 と c_2 は $c_1 \approx c_2$ なる数であり、 T はべき積である。このとき、簡約子 G を \tilde{F}_1 と \tilde{F}_2 の両方から $\tilde{F}_1' := \tilde{F}_1 - c T \text{rt}(G)$ および $\tilde{F}_2' := \tilde{F}_2 - c T \text{rt}(G)$ なる算式で引く。 c の決め方は 5.3 節で述べるが、 $c \approx c_1 \approx c_2$ である。この操作を簡約子減算と呼ぶ。減算 $\tilde{F}_1' - \tilde{F}_2'$ においてなお桁落ちが生じるならば、それを本質的キャンセルとみなす。

5 インプリメンテーションの詳細

我々のアイデアは非常に簡単だが、工夫 3 のインプリメンテーションは細かい考察を必要とする。

5.1 クローンの内部表現

現在の計算機プログラムでは、入力多項式と S 多項式は F_i ($i = 1, 2, \dots$) のように一意的に番号付けられ、番号は多項式が M 簡約されても不変である。 F_i が M 簡約で 0 になった場合には F_i はメモリから消去される。 F_i が G_j により M 簡約され G_j のクローンになったとする。このとき、クローンを指定するのにインデックス j だけでは不十分である： G_j は計算中に変えられるので、現在の G_j をセーブしておく必要がある。その M 簡約を $F_i := F_i - c_j T_j G_j$ とする、ただし、 $c_j \in \mathbb{C}$ で T_j はべき積である。乗数 c_j は、 G_i が M 簡約で定数倍されると同じく定数倍されなければならない。したがって、乗数 c_j もセーブする必要がある。 F_i は G_j で複数回簡約されることもあるが、各 M 簡約毎に G_j をセーブする必要がある。以上より、 G_j で生成されるクローンを次のように表現する。

1. G_j は主係数が 1 になるように規格化する。
2. 各 M 簡約でのクローンを三つ組 $\langle j, c_j, T_j G_j \rangle$ で表し、クローン三つ組と呼ぶ。
3. F_i に対するクローン三つ組をリストにして F_i に付加する。たとえば、
 $F_1 \xrightarrow{G_j} \xrightarrow{G_{j'}} \dots$ の場合、付加されるリストは $(\dots \langle j', c_{j'}, T_{j'} G_{j'} \rangle \langle j, c_j, T_j G_j \rangle)$ である。

5.2 クローン生成と自己簡約の判定基準

對自己簡約は非常に稀にしか起きない割に処理が面倒なので、現在の計算機プログラムには取り込んでいない。したがって、下記の判定基準は安直なもので、完全ではない。多項式 F_1 と F_2 のクローン三つ組を次式とする。

$$\begin{aligned} F_1 : & (\langle j_1, c_1, T_1 G_1 \rangle \langle j'_1, c'_1, T'_1 G'_1 \rangle \dots), \\ F_2 : & (\langle j_2, c_2, T_2 G_2 \rangle \langle j'_2, c'_2, T'_2 G'_2 \rangle \dots). \end{aligned} \quad (5.1)$$

クローン生成と自己簡約の判定基準は下記である ($\tilde{F} := F - cTG$ に対して記述する)。

判定基準 C1 If $\|lc(G)\| < \|rt(G)\|/5$ then G is a polynomial with small leading term.

If $\|lc(G)\| > 5 \|rt(G)\|$ then G is a polynomial with large leading term.

判定基準 C2 For the case of small leading term:

If $lt(rt(TG)) \succ lt(rt(F))$ and $5 \|lc(F)/lc(G)\| < \|rt(F)\|/\|rt(G)\|$ then $\tilde{F} = clone(G)$.

If $lt(rt(TG)) \propto lt(rt(F))$ and $5 \|lc(F)/lc(G)\| < \|rt(F)\|/\|rt(G)\|$ and

$5 \|lc(rt(F))\| < \|lc(rt(TG))\|$ then $\tilde{F} = clone(G)$.

判定基準 C3 For the case of large leading term:

If $lt(rt(TG)) \succ lt(rt(F))$ and $\|lc(F)/lc(G)\| < 5 \|rt(F)\|/\|rt(G)\|$ then $\tilde{F} = clone(F)$.

If $lt(rt(TG)) \propto lt(rt(F))$ and $\|lc(F)/lc(G)\| < 5 \|rt(F)\|/\|rt(G)\|$ and

$\|lc(rt(F))\| < 5 \|lc(rt(TG))\|$ then $\tilde{F} = clone(F)$.

判定基準 SR If $j_1 = j_2$ and $T_1 G_1 = T_2 G_2$ then $Spol(F_1, F_2)$ causes the self-reduction.

条件 ($j_1 = j_2$ and $T_1 G_1 = T_2 G_2$) に加えて 条件 ($j'_1 = j'_2$ and $T'_1 G'_1 = T'_2 G'_2$) も成立するなら、 $Spol(F_1, F_2)$ は 2 重クローンによる自己簡約を引き起こす、等々に注意されたい。

5.3 簡約子減算

現在の計算機プログラムでは、プログラムが簡単になるよう、計算に現れる全ての多項式の主係数は1に規格化される。規格化を $\tilde{F}_i := F_i - c_j T_j G_j \Rightarrow \tilde{F}_i := \tilde{F}_i / \text{lc}(\tilde{F}_i)$ とする。この規格化により、乗数 c_j は次のように修正される： F_i に付加されているクローン三つ組のリスト中の全ての乗数を $\langle j, c_j, T_j G_j \rangle \Rightarrow \langle j, c_j / \text{lc}(\tilde{F}_i), T_j G_j \rangle$ と変更。

簡約子減算を考える。条件 (2.5) が成立するなら、減算は簡単である：工夫3で使った記法で言えば、 \tilde{F}_1 と \tilde{F}_2 は $\tilde{F}_1 = F_1 - c_1 T G$ および $\tilde{F}_2 := F_2 - c_2 T G$ と表されるが、 $c_1 = c_2$ である。したがって、 F_1 と F_2 の双方から $c_1 T \text{rt}(G)$ を引く。もしも (2.5) が成立しなければ $c_1 \neq c_2$ である ($c_1 \approx c_2$ ではあるが)。この場合は c を

$$c = \begin{cases} c_1 & \text{if } |c_1| \leq |c_2|, \\ c_2 & \text{if } |c_1| > |c_2|, \end{cases} \quad (5.2)$$

と計算し、 F_1 と F_2 から G を $F_1 := F_1 - c T \text{rt}(G)$ および $F_2 := F_2 - c T \text{rt}(G)$ と引く。

5.4 本質的キャンセル量の推定

浮動小数グレブナー基底の計算で実際に起きるキャンセルは自己簡約によるものと本質的キャンセルの和である。したがって、自己簡約によるキャンセルを取り除けば、後に残るのは本質的キャンセルである。前章の工夫3はこの考えに基づいている。論文 [1] と [9] では、本質的キャンセルはシジジー (syzygies) で定義されているが、シジジーの計算は実際には時間がかかる。一方、簡約子減算は時間がかからないので、我々の方法は实际的である。しかしながら、工夫3では類似度が5未満のクローンによる小さな自己簡約が見逃されている。よって、工夫3による本質的キャンセルの評価は正確ではなく、過大評価となるであろうことに注意しなければならない。

例2を用いて本質的キャンセル量の推定を例示しよう。例2の第5行の簡約 $\text{Spol}(P_3, P'_2) \xrightarrow{P_3} \xrightarrow{P_1} \xrightarrow{P_4} \dots$ では、2重クローンによる自己簡約が発生し、 $O(10^{10})$ の巨大なキャンセルが起きている。簡約子減算では2個のクローンをさっ引くことになるが、以下に見るように簡約子減算で $O(10^{10})$ のキャンセルの大部分は消え、後に少しばかりの本質的キャンセルが残ることが分るであろう。

例4 例2の第5行における本質的キャンセル量の推定。

$Q_1 = \text{Lred}(\text{Lred}(\text{Lred}(\text{Spol}(P_3, P'_2), P_3), P_1), P_4)$ とおき、 $\text{Lred}(Q_1, P'_2) = Q_1 - Q_2$ とする。ここで、 $P'_2 = \text{clone}(P_1, P_4)$ である。下記では、下線は Q_1 と Q_2 (あるいは Q'_1 と Q'_2) の係数部で数値が同じ桁を表す。

$$\begin{aligned} Q_1 &= + \#BE[\underline{1.1152418136789309558453405171e-1}, 8.6e-28] y^3 \\ &\quad + \#BE[\underline{3.3457253711642806415804801040e-1}, 3.7e-27] xy \\ &\quad - \#BE[\underline{4.1613506289664168782840449950e-5}, 1.1e-28] y^2, \\ Q_2 &= + \#BE[\underline{1.1152418132002535431698179200e-1}, 8.6e-28] y^3 \\ &\quad + \#BE[\underline{3.3457254396007606295094537600e-1}, 3.7e-27] xy \\ &\quad - \#BE[\underline{4.1612957039749613089747630908e-5}, 1.1e-28] y^2. \end{aligned}$$

Q_1 と Q_2 から簡約子 $\text{rt}(P_4)$ の倍数を減算し、結果を $Q_1 \rightarrow Q'_1$ および $Q_2 \rightarrow Q'_2$ と表す：

$$\begin{aligned} Q'_1 &= + \#BE[\underline{2.3290837408651847149108379154e-9}, 8.6e-28] y^3 \\ &\quad - \#BE[\underline{1.1194031410170599640717774130e-2}, 1.1e-28] y^2, \\ Q'_2 &= + \#BE[\underline{2.2812159995976324552013022754e-9}, 8.6e-28] y^3 \\ &\quad - \#BE[\underline{6.8436479987928973656039068264e-9}, 3.7e-27] xy \\ &\quad - \#BE[\underline{1.1194030860920685085024681310e-2}, 1.1e-28] y^2. \end{aligned}$$

つぎに、 Q'_1 と Q'_2 から簡約子 $\text{rt}(P_1)$ の倍数を減算し、結果を $Q'_1 \rightarrow Q''_1$ および $Q'_2 \rightarrow Q''_2$ と表す：

$$\begin{aligned} Q''_1 &= + \#BE[2.3290837408651847149108379154e-9, 8.6e-28] y^3, \\ Q''_2 &= + \#BE[2.2812159995976324552013022754e-9, 8.6e-28] y^3 \\ &\quad + \#BE[6.8436479987928973656039068264e-9, 3.7e-27] xy \\ &\quad + \#BE[5.4924991455569309281904242148e-10, 1.1e-28] y^2. \end{aligned}$$

$Q''_1 - Q''_2$ の計算で $O(10^2)$ の桁落ちが生じるが、これが本質的桁落ちである。

◇

参 考 文 献

- [1] M. Bodrato and A. Zanoni. Intervals, syzygies, numerical Gröbner bases: a mixed study. *Proceedings of CASC2006 (Computer Algebra in Scientific Computing)*; Springer-Verlag LNCS 4194, 64-76, 2006.
- [2] J.E. Collins. Subresultant and reduced polynomial remainder sequence. *J. ACM* 14 (1967), 128-142.
- [3] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag New York, 1997.
- [4] E. Fortuna, P. Gianni and B. Trager. Degree reduction under specialization. *J. Pure Appl. Algebra* 164 (2001), 153-164.
- [5] L. Gonzalez-Vega, C. Traverso and A. Zanoni. Hilbert stratification and parametric Gröbner bases. *Proceedings of CASC2005 (Computer Algebra in Scientific Computing)*; Springer-Verlag LNCS 3718, 220-235, 2005.
- [6] F. Kako and T. Sasaki. Proposal of "effective" floating-point number. Preprint of Univ. Tsukuba, May 1997 (unpublished).
- [7] A. Kondratyev, H.J. Stetter and S. Winkler. Numerical computation of Gröbner bases. *Proceedings of CASC2004 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, 295-306, St. Petersburg, Russia, 2004.
- [8] B. Mourrain. Pythagore's dilemma, symbolic-numeric computation, and the border basis method. *Symbolic-Numeric Computations (Trends in Mathematics)*, 223-243, Birkhäuser Verlag, 2007.
- [9] T. Sasaki and F. Kako. Computing floating-point Gröbner base stably. *Proceedings of SNC2007 (Symbolic Numeric Computation)*, 180-189, London, Canada, 2007.
- [10] K. Shirayanagi. An algorithm to compute floating-point Gröbner bases. *Mathematical Computation with Maple V. Ideas and Applications*, Birkhäuser, 95-106, 1993.
- [11] K. Shirayanagi. Floating point Gröbner bases. *Mathematics and Computers in Simulation* 42 (1996), 509-528.
- [12] K. Shirayanagi and M. Sweedler. Remarks on automatic algorithm stabilization. *J. Symb. Comput.*, 26 (1998), 761-765.
- [13] H.J. Stetter. Stabilization of polynomial systems solving with Gröbner bases. *Proceedings of ISSAC'97 (Intern'l Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, 117-124, ACM Press, 1997.
- [14] H.J. Stetter. *Numerical Polynomial Algebra*. SIAM Publ., Philadelphia, 2004.
- [15] H.J. Stetter. Approximate Gröbner bases – an impossible concept? *Proceedings of SNC2005 (Symbolic-Numeric Computation)*, 235-236, Xi'an, China, 2005.
- [16] C. Traverso. Syzygies, and the stabilization of numerical Buchberger algorithm. *Proceedings of LMCS2002 (Logic, Mathematics and Computer Science)*, 244-255, RISC-Linz, Austria, 2002.
- [17] C. Traverso and A. Zanoni. Numerical stability and stabilization of Gröbner basis computation. *Proceedings of ISSAC2002 (Intern'l Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, 262-269, ACM Press, 2002.
- [18] V. Weispfenning. Gröbner bases for inexact input data. *Proceedings of CASC2003 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, 403-411, Passau, Germany, 2003.